त्रिभुजम् अथ च तस्य गुणाः

अध्यायः 6

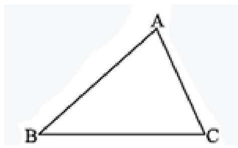
6.1 भूमिका

भवन्तः दृष्टवन्तः यत् त्रिभुजं त्रिभिः रेखाखण्डैः संवृत्तमुख-सरलाकृतिः अस्ति। अस्य त्रीणि शीर्षाणि, तिस्रः भुजाः त्रयः च कोणाः भवन्ति। अत्र एकं $\triangle ABC$ इति त्रिभुजम् (आकृतिः 6.1) अस्ति। अस्मिन् सन्ति -

भुजाः $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$

कोणाः $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle BCA$

शीर्षाणि A, B, C



आकृतिः 6.1

A इति शीर्षाभिमुखं $\overline{BC}$ इति भुजा अस्ति। किं भवन्तः $\overline{AB}$ इति भुजायाः सम्मुख-कोणस्य नाम वक्तुं शक्नुवन्ति ? भवन्तः जानन्ति यत् त्रिभुजानां वर्गीकरणम् (i) भुजानाम् (ii) कोणानां च आधारेण कथं क्रियते।

(i) भुजाधारेण - बिषमबाहुः समद्विबाहुः समबाहुः चेति।

(ii) कोणाधारेण - न्यूनकोणः, अधिककोणः समकोणः च।

उपर्युक्तेन निर्दर्शनेन सर्वविधत्रिभुजानाम् आकाराणां प्रतिरूपाणि उपमानानि वा कागदेन छित्वा निर्मान्तु। स्वकीय-प्रतिरूपाणां सङ्गीनां प्रतिरूपैः सह तुलनां कुर्वन्तु।

आयान्तु त्रिभुजानां विषये इतोऽपि अधिकं ज्ञातुं प्रयासं कुर्मः।

एतान् कुर्वन्तु

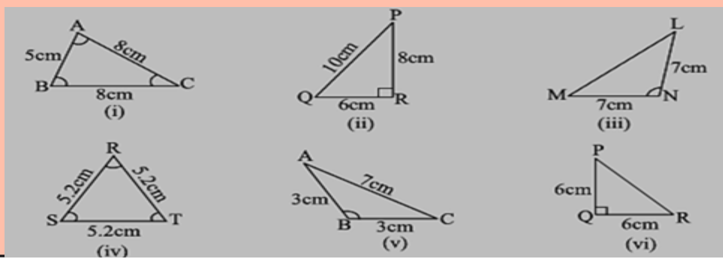
1. $\triangle ABC$ इति त्रिभुजस्य षण्णाम् अवयवानाम् (तिसृणां भुजानां त्रयाणां च कोणानाम्) नामानि लिखन्तु
2. लिखन्तु

(i) $\triangle PQR$ इति त्रिभुजस्य Q इति शीर्षसः सम्मुख-भुजा। (ii) $\triangle LMN$ इति त्रिभुजस्य LM इति भुजायाः सम्मुखकोणः।

(iii) $\triangle RST$ इति त्रिभुजस्य RT इति भुजायाः सम्मुखशीर्षम्।

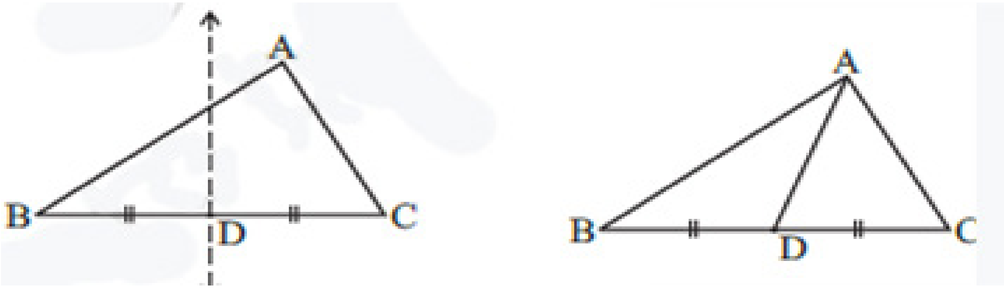
3. 6.2 इति आकृतिं पश्यन्तु त्रिभुजेषु च प्रत्येकं त्रिभुजस्य वर्गीकरणं कुर्वन्तु।

(a) भुजानाम् आधारेण (b) कोणानाम् आधारेण



6.2 त्रिभुजस्य माध्यमिकाः

भवन्तः जानन्ति यत् एकस्य प्रदत्तरेखाखण्डस्य लम्बसमद्विभाजकः कागदस्य व्यावर्तन-प्रक्रियया कथं ज्ञायते। कागद-खण्डेन एकम् ABC इति त्रिभुजं छिन्दन्तु (आकृतिः 6.3)। अस्य एकां काञ्चित् भुजां कल्पयन्तु $\overline{BC}$ इति स्वीकुर्वन्तु। कागद-व्यावर्तन-प्रक्रियया $\overline{BC}$ इत्यस्याः भुजायाः लम्बसमद्विभाजकं जानन्तु।। कागदोपरि वलयस्य अधस्तलम् $\overline{BC}$ इति भुजाम् 'D' इत्यस्मिन् बिन्दौ छिनत्ति यः तस्य मध्यबिन्दुः अस्ति। 'A' इति शीर्षम् 'D' इत्यनेन मेलयन्तु।



आकृतिः6.3

AD इति रेखाखण्डः, यः $\overline{BC}$ इति भुजायाः D इति मध्यबिन्दुम् A इति सम्मुखशीर्षेण मेलयति त्रिभुजस्य एका **माध्यमिका** वर्तते।

$\overline{AB}$ अथ च $\overline{CA}$ इति भुजैः स्वीकृत्य अस्य त्रिभुजस्य अन्ये द्वे माध्यमिके आलिखन्तु।

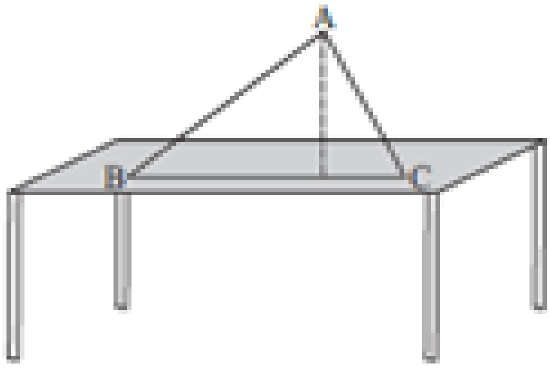
माध्यमिका, त्रिभुजस्य एकं शीर्षं सम्मुखी-भुजस्य मध्यबिन्दुना मेलयति।

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. एकस्मिन् त्रिभुजे कति माध्यमिकाः भवितुम् अर्हति ?
2. किम् एका माध्यमिका पूर्णतया त्रिभुजस्य अन्तः एव स्थिता भवति ? (यदि भवन्तः एतत् असत्यम् अधिगच्छन्ति तस्याः स्थितेः कृते एकाम् आकृतिम् आलिखन्तु।)

6.3 त्रिभुजस्य शीर्षलम्बाः

त्रिभुजाकारं संसृष्टपत्रस्य एकं ABC इति खण्डं स्वीकुर्वन्तु। एनं च उत्पीठिकायां वक्रतारहितम् ऊर्ध्वाधरम् ऊर्ध्वीकुर्वन्तु। अस्य औन्नत्यं कियद् अस्ति ? एतद् औन्नत्यम् A इति शीर्षात् $\overline{BC}$ इति भुजा पर्यन्तं दूरत्वम् दूरता वा अस्ति।



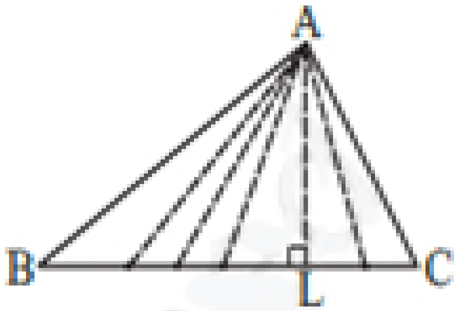
(आकृतिः 6.4)

A इति शीर्षात् $\overline{BC}$ इति भुज-पर्यन्तम् अनेकाः रेखाखण्डाः आलेखितुं शक्यते (आकृतिः 6.5)। एषु रेखाखण्डेषु त्रिभुजस्य औन्नत्यं कतमः रेखाखण्डः प्रदर्शयति ?

सः रेखाखण्डः यः A इति शीर्षाद् अधः सरलतया ऊर्ध्वाधरम् $\overline{BC}$ इति भुजा पर्यन्तं तस्यां च लम्बवत् भवति एषः अस्य औन्नत्यं भवति।

AL इति रेखाखण्डः अस्य त्रिभुजस्य शीर्षलम्बः अस्ति।

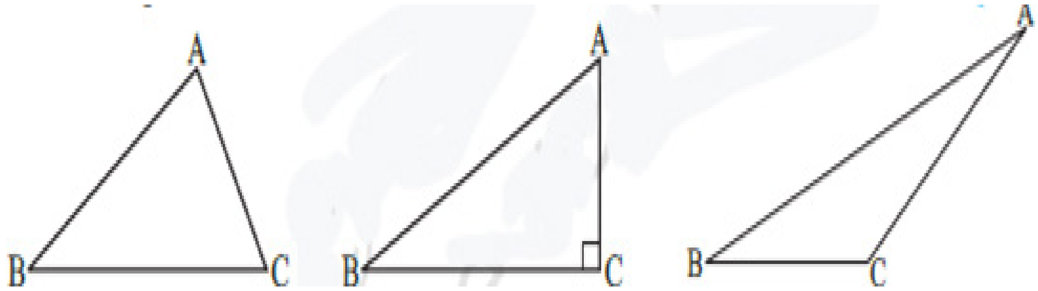
शीर्षलम्बस्य एकः अन्तबिन्दुः त्रिभुजस्य शीर्षे अपरश्च अन्तबिन्दुः सम्मुखभुजां निर्मीयमाणायां रेखायां स्थितः भवति। प्रत्येकं शीर्षाद् एकः शीर्षलम्बः आक्रष्टुं शक्यते



(आकृातः 6.5)

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. एकस्मिन् त्रिभुजे कति शीर्षाणि भवितुं शक्नुवन्ति ?
2. निम्न-त्रिभुजेषु A इति शीर्षबिन्दुतः $\overline{BC}$ इति भुजा पर्यन्तम् अनुमानेन शीर्षलम्बम् आलिखन्तु।



(i) न्यूनकोणः (ii) समकोणः (iii) अधिककोणः

आकृतिः 6.6

3. किम् एकः शीर्षलम्बः सदैव पूर्णतया त्रिभुजस्य आभ्यन्तरं भवति? (यदि भवन्तः अधिगमयन्ति यद् एतत् सत्यं नास्ति तर्हि तस्याः स्थितेः कृते एकाम् आकृतिम् आलिखन्तु।)
4. किं भवन्तः एतादृशं त्रिभुजं चिन्तयितुं शक्नुवन्ति यस्य द्वौ शीर्षलम्बौ तस्य भुजे एव स्तः ?
5. किं कस्यचित् त्रिभुजस्य माध्यमिका एवञ्च शीर्षलम्बः एकैव रेखाखण्डः भवितुम् अर्हति ?

(सङ्केतः 4 अथ च 5 प्रश्नयोः कृते प्रत्येकं प्रकारकस्य त्रिभुजस्य शीर्षलम्बम् आकृष्य अन्वेषणं कुर्वन्तु)

एतान् कुर्वन्तु

कागदेन छिन्नाः एताः आकृतीः स्वीकुर्वन्तु

(i) समबाहुत्रिभुजम् (ii) समद्विबाहुत्रिभुजम् अथ च (iii) विषमबाहुत्रिभुजम्

एतेषां शीर्षलम्बाः माध्यमिकाः च ज्ञायन्ताम्। किम् भवन्तः एतासु काञ्चित् विशिष्टतां आप्नुवन्ति ? स्वकीयैः सह सह आसु आकृतिषु चर्चां कुर्वन्तु।

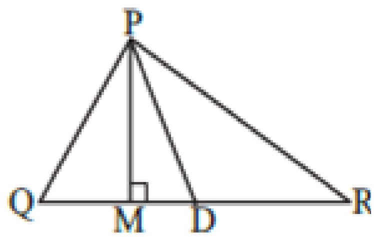
प्रश्नावली 6.1

1. $\triangle$ PQR इत्यस्मिन् त्रिभुजे D इति बिन्दुः $\overline{QR}$ इत्यस्य भुजस्य मध्यबिन्दुः अस्ति।

   $\overline{PM}$ __________________ अस्ति।

   PD __________________ अस्ति।

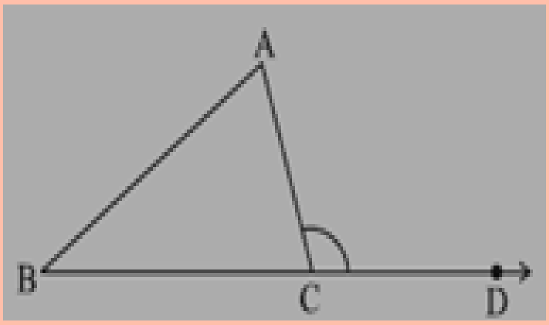
   किम् QM = MR इति अस्ति ?



2. निम्नानां कृते अनुमानेन आकृतिम् आलिखन्तु -
   (a) $\triangle$ABC इत्यस्मिन् त्रिभुजे BE इति माध्यमिका अस्ति।
   (b) $\triangle$PQR इत्यस्मिन् त्रिभुजे PQ तथा च PR त्रिभुजस्य शीर्षलम्बौ स्तः।
   (c) $\triangle$XYZ इत्यस्मिन् त्रिभुजे YL इति त्रिभुजस्य शीर्षलम्बः तस्य बर्हिभागे अस्ति।
3. आकृतिम् आलिख्य पुष्टिं कुर्वन्तु यत् समद्विबाहुत्रिभुजे शीर्षलम्बः अथवा माध्यमिका एकैव रेखाखण्डः भवितुम् अर्हति वा इति।

6.4 त्रिभुजस्य बाह्यकोणः एवञ्च अस्य गुणाः

एतान् कुर्वन्तु



1. एकम् ABC इति त्रिभुजम् आलिखन्तु अस्य च एकाम् $\overline{BC}$ इति भुजाम् एकां दिशं प्रति वर्धताम् (आकृतिः 6.7)। C इत्यस्मिन् बिन्दौ ACD इति निर्मितकोणे ध्यानं यच्छन्तु। एषः कोणः $\triangle$ABC इत्यस्य बहिर्भागे स्थितः वर्तते। वयम् एतम् $\triangle$ABC इति त्रिभुजस्य C इत्यस्मिन् शीर्षे निर्मित-बाह्यकोणम् इति कथयामः।

स्पष्टं वर्तते यत् ∠BCA अथ च ∠ACD मिथः संलग्नकोणौ स्तः। त्रिभुजस्य शेषौ ∠A तथा च ∠B इति कोणौ ACD इति

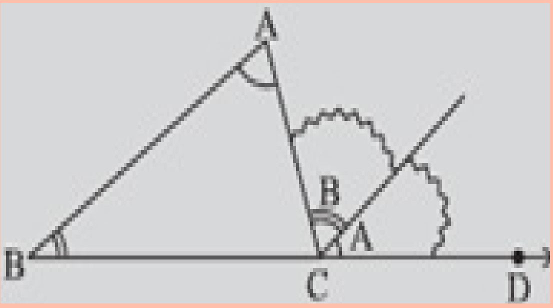
आकृतिः 6.7

बाह्यकोणस्य द्वौ सम्मुखौ अन्तःकोणौ अथवा दूरस्थौ अन्तःकोणौ इति कथ्येते।

अधुना छित्वा अथवा प्रतिरूपम् (trace copy) आदाय ∠A अथ च ∠B इति संलग्नं कृत्वा ∠ACD इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु यथा 6.8 इति आकृत्यां प्रदर्शितम् अस्ति।

किम् एतौ ∠ACD इति कोणं पूर्णतया आच्छादयतः?

भवन्तः किं m ∠ACD = m ∠A + m ∠B इति वक्तुं शक्नुवन्ति ?



2. यथा अस्माभिः पूर्वं कृतम्। एकम् ABC इति त्रिभुजम् आदाय तस्य ACD इति बाह्यकोणं निर्मान्तु चान्द्रिकायाः साहाय्येन ∠ACD, ∠A तथा च ∠B इत्येतौ मापनं कुरुताम्।

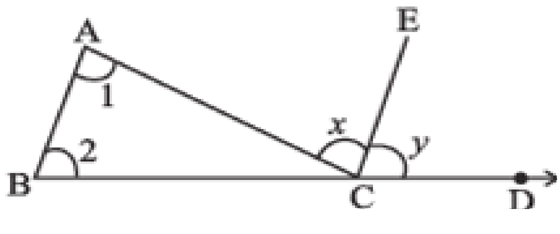
∠A + ∠B इत्येतयोः योगं ज्ञात्वा तयोः तुलनाम् ∠ACD इत्यस्य परिमाणेन कुर्वन्तु । कोण-मापकस्य साहाय्येन ∠ACD इत्यस्य परिमाणः ∠A + ∠B इत्यनयोः तुल्यः भविष्यति। यदि परिमाणे कापि त्रूटिः विद्यते तदा अनयोः परिमाणः प्रायशः तुल्यः भविष्यति।

आकृतिः 6.8

भवन्तः एतौ द्वौ क्रियाकलापौ कानिचित् अन्यानि त्रिभुजानि स्वीकृत्य तेषां च बाह्यकोणान् आलिख्य व्याहर्तुं शक्नुवन्ति। प्रतिवारं भवन्तः एतद् एव प्राप्स्यन्ति यत् त्रिभुजस्य बाह्यकोणः तस्य द्वयोः सम्मुखयोः अन्तःकोणयोः योगस्य तुल्यः भवति।

एकेन चरणबद्धेन अथवा तर्कपूर्णविधिना अपि अस्य गुणस्य पुष्टिं कर्तुं शक्यते।

कस्यचित् त्रिभुजस्य बाह्यकोणः स्वयोः द्वयोः सम्मुखान्तःकोणयोः योगस्य तुल्यः भवति।



दत्तम् अस्ति : $\triangle$ABC इति त्रिभुजं स्वीकुर्मः। ∠ACD इति अस्य त्रिभुजस्य बाह्यकोणः अस्ति।

दर्शितव्यम् अस्ति : m ∠ACD = m ∠A + m ∠B

C इति शीर्षात् $\overline{BA}$ इति भुजायाः $\overline{CE}$ इति समान्तराम् एकां रेखाम् आलिखन्तु।

आकृतिः 6.9

औचित्यम्

चरणम्	**कारणानि**
(a) ∠1 = ∠x	($\overline{BA}$) || ($\overline{CE}$) तथा च ($\overline{AC}$) एका तिर्यक्-रेखा अस्ति। अतः एकान्तरकोणाः समानाः भवेयुः।

(b) $\angle 2 = \angle y$ $(\overline{BA}) \parallel (\overline{CE})$ तथा च $(\overline{BD})$ एका तिर्यक् रेखा अस्ति।
अतः सङ्गतकोणाः समानाः भवेयुः।

(c) $\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y$

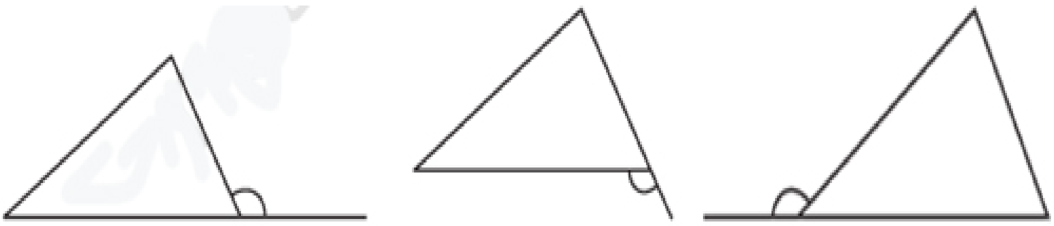
(d) सम्प्रति $\angle x + \angle y = m\ \angle ACD$ (6.9 इति आकृतितः)

अतः $\angle 1 + \angle 2 = \angle ACD$

कस्यचित् त्रिभुजस्य बाह्यकोणः तस्य च द्वयोः सम्मुखयोः अन्तकोणयोः अन्तःस्थः एषः सम्बन्धः त्रिभुजस्य बाह्यकोणस्य गुणनाम्ना ज्ञायते

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. एकस्य त्रिभुजस्य बाह्यकोणाः भिन्न-भिन्नप्रकारेण निर्मातुं शक्यन्ते। एषु त्रयः निम्नप्रकारेण दर्शिताः सन्ति (आकृतिः 6.10)



आकृतिः 6.10

एतद् अतिरिच्य त्रिभिः प्रकारैः अपि बाह्यकोणाः निर्मातुं शक्यन्ते। तान् अपि अनुमानेन निर्मान्तु।

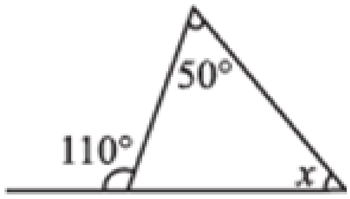
2. कस्यचित् त्रिभुजस्य एकस्मिन् शीर्षे किं निर्मितौ द्वौ बाह्यकोणौ इतरेतरं समानौ भवतः ?
3. कस्यचित् त्रिभुजस्य एकः बाह्यकोणः तस्य च संलग्नस्य अन्तःकोणस्य विषये भवन्तः किमपि वक्तुं शक्नुवन्ति ?

उदाहरणम् 1 6.11 इति आकृत्याम् x इत्यस्य मानः ज्ञायताम्।

समाधानम् सम्मुखानाम् अन्तःकोणानां योगः = बाह्यकोणः

अथवा $50° + x = 110°$

अथवा $x = 60°$

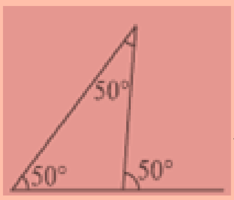


आकृतिः 6.11

विचारयन्तु चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. प्रत्येकं दशायाम् अन्तःसम्मुखकोणानां विषये भवन्तः किं वक्तुं शक्यते अपरन्तु बाह्यकोणः -
   (i) एकः समकोणः? (ii) एकः अधिककोणः? (iii) एकः न्यूनकोणः ?
2. किं कस्यचित् त्रिभुजस्य कश्चन बाह्यकोणः एकः सरलकोणः अपि भवितुम् अर्हति।

एतान् कुर्वन्तु

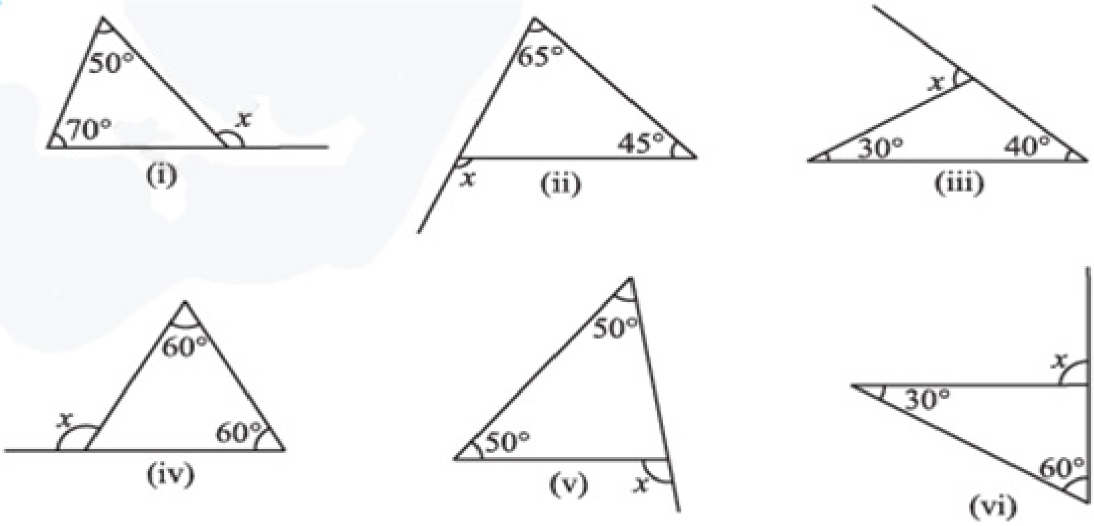


आकृतिः 6.12

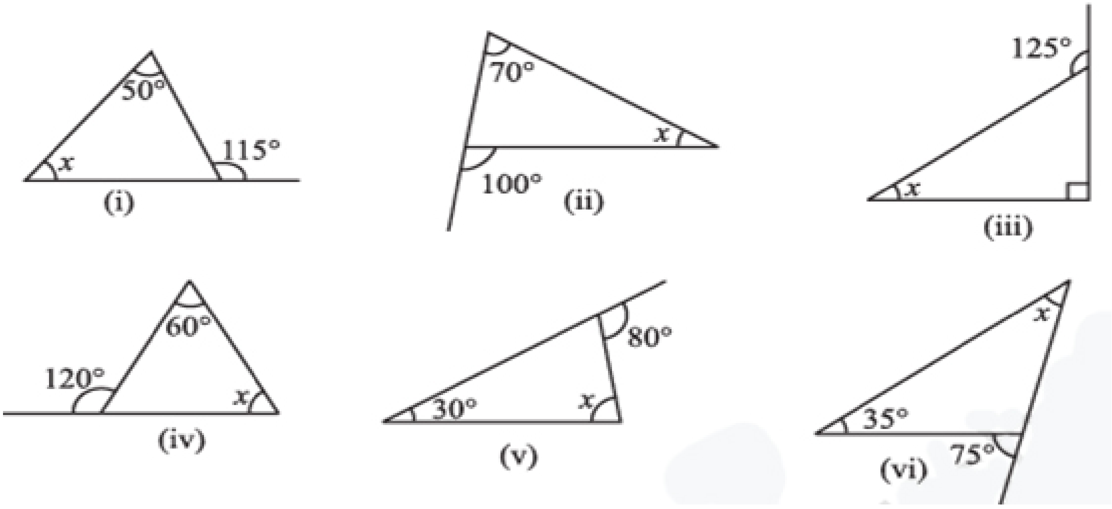
1. कस्मिंश्चित् त्रिभुजे एकस्य बाह्यकोणस्य परिमाणम् 70° इति अस्ति अथ च अन्तःसम्मुखकोणेषु एकस्य परिमाणम् 25° इति अस्ति। द्वितीयस्य अन्तःसम्मुखकोणस्य परिमाणं ज्ञायताम्।
2. कस्यचित् त्रिभुजस्य द्वयोः अन्तःसम्मुखकोणयोः परिमाणौ 60° तथा च 80° इति अस्ति। तस्य बाह्यकोणस्य परिमाणः ज्ञायताम्।
3. किम् अस्याम् आकृत्यां कापि त्रूटिः वर्तते (आकृतिः 6.12) ? टिप्पणीं कुर्वन्तु।

प्रश्नावली 6.2

1. निम्नाकृतिषु x इति आज्ञात-बाह्यकोणस्य मानं ज्ञायताम्।



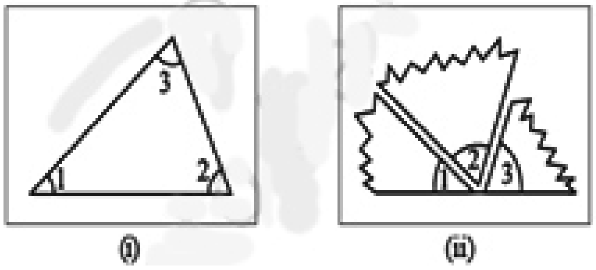
2. निम्नलिखिताकृतिषु x इत्यस्य आज्ञातान्तःकोणस्य मानं ज्ञायताम्।



6.5 त्रिभुजस्य अन्तःकोणानां योग-गुणः

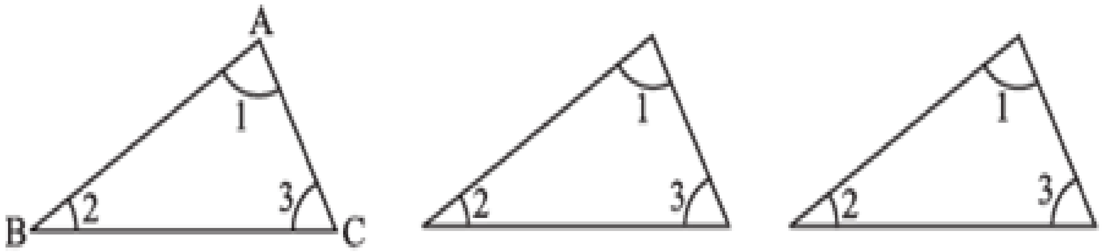
त्रिभुजस्य त्रयाणां कोणानाम् इतरेतरः सम्बन्ध-प्रदर्शकः अद्भुत-गुणः अस्ति। एतं गुणं भवन्तः चतुर्भिः निम्नलिखितक्रियाकलापैः द्रष्टुम् अथ च अधिगन्तुं शक्ष्यन्ति।

1. एकं त्रिभुजम् आलिखन्तु। अस्य त्रीन् कोणान् छित्वा पृथक् - पृथक् कुर्वन्तु। एतान् अधुना इत्थं व्यवस्थीकृत्य स्थापयन्तु यथा 6.13 इति आकृत्याम् (i) एवञ्च (ii) एतन्मध्ये प्रदर्शितं वर्तते। एते त्रयः अपि कोणाः मिलित्वा एकं कोणं निर्मान्ति। यस्य परिमाणः 180° इति अस्ति। अनेन प्रकारेण त्रिभुजस्य त्रयाणां कोणानां परिमाणानां योगः 180° इति भवति।



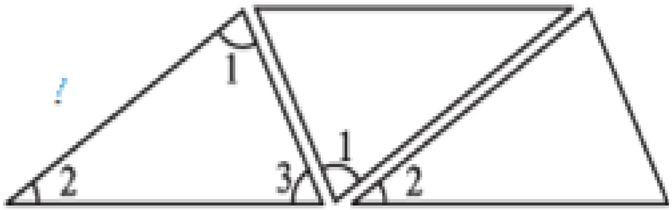
आकृतिः 6.13

2. एतत् तथ्यं भवन्तः एकेन अन्यविधिना अपि द्रष्टुं शक्नुवन्ति। कस्यचित् $\triangle ABC$ इति त्रिभुजस्य त्रीणि प्रतिरूपाणि रचयन्तु (आकृतिः 6.14)।



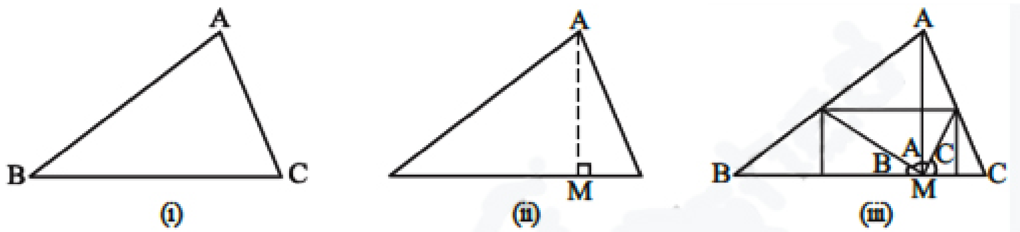
आकृतिः 6.14

एतानि त्रीणि 6.15 इति आकृतिवत् मेलयित्वा सम्यक्तया स्थापयन्तु। $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ इत्यादीन् भवन्तः कथम् अवलोकयन्ति ? (किम् अत्र भवन्तः बाह्यकोणेन सम्बन्धितगुणं द्रष्टुं शक्नुवन्ति ?)



आकृतिः 6.15

3. एकेन कागद-खण्डेन किञ्चन एकं यथा $\triangle ABC$ इति त्रिभुजम् (आकृतिः 6.16)छिन्दन्तु। एतत् त्रिभुजं वक्रीकृत्य A इति शीर्षात् गम्यमानम् AM इति शीर्षलम्बं निर्धारीकुर्वन्तु (निर्धारितं कुर्वन्तु) । अधुना अस्य त्रिभुजस्य त्रीन् कोणभागान् तथा वक्रीकुर्वन्तु येन A, B तथा च C इति त्रीणि अपि शीर्षाणि M इत्यस्मिन् बिन्दौ मिलेयुः।



आकृतिः 6.16

भवन्तः पश्यन्ति यत् त्रिभुजस्य त्रयः कोणाः सम्मिल्य एकं सरलकोणं निर्मान्ति। पुनश्च एषः क्रियाकलाप दर्शयति यत् त्रिभुजस्य त्रयाणां कोणानां परिमापानां योगः 180° इति भवति।

4. स्वीयाम् अभ्यासपुस्तिकायां कानिचित् मन्वताम् $\triangle ABC$, $\triangle PQR$ तथा च $\triangle XYZ$ इति त्रीणि त्रिभुजानि आलिखन्तु। एतेषां सर्वेषां त्रिभुजानां प्रत्येकं कोणस्य मापम् एकेन कोणमापकेन मित्वा ज्ञायताम्।

एतान् मापान् तालिकारूपेण अनेन प्रकारेण लिखन्तु-

$\triangle$ त्रिभुजस्य नाम	कोणानां परिमापाः			त्रयाणां कोणानां मापानां योगः
$\triangle ABC$	$m\angle A =$	$m\angle B =$	$m\angle C =$	$m\angle A + m\angle B + m\angle C =$
$\triangle PQR$	$m\angle P =$	$m\angle Q =$	$m\angle R =$	$m\angle P + m\angle Q + m\angle R =$
$\triangle XYZ$	$m\angle X =$	$m\angle Y =$	$m\angle Z =$	$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z =$

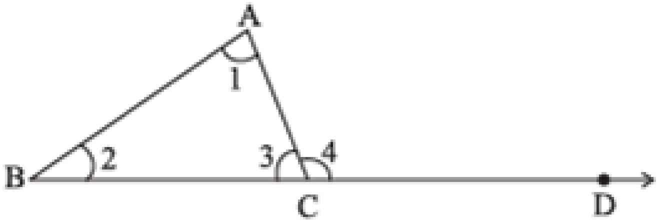
मापने सम्भाविताः त्रूटीः ध्यायन् भवन्तः प्राप्स्यन्ति यत् अन्तिमे स्मम्भे त्रयाणां कोणानां योगः 180° (अथवा प्रायशः 180°) एव अस्ति।

पूर्णतया शुद्धमापे सम्भवे सति वयम् एतद् एव प्राप्स्यामः यत् त्रिभुजस्य त्रयाणां कोण-परिमापानां योगः 180°इति भवति।

इदानीं भवन्तः स्वम् एतं निर्णयं तर्कपूर्णकथनैः चरणबद्धरूपेण प्रस्तोतुं शक्नुवन्ति।

कथनम् त्रिभुजस्य त्रयाणां कोण-परिमापानां योगः 180°इति भवति । एतत् तथ्यं प्रमाणीकर्तुं वयं त्रिभुजस्य बाह्यकोण-गुणस्य उपयोगं कुर्मः।

दत्तम् अस्ति : $\triangle ABC$ इति त्रिभुजस्य $\angle 1$, $\angle 2$ एवञ्च $\angle 3$ इति त्रयः कोणाः सन्ति (आकृतिः 6.17)।



आकृतिः 6.17

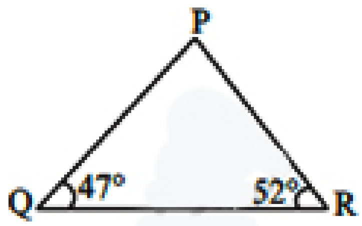
$\angle 4$ इति एकः बाह्यकोणः अस्ति यः $\overline{BC}$ इति भुजाम् D इति बिन्दुपर्यन्तं वर्धनेन उत्पन्नं भवति।

उपपत्तिः $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$ (बाह्यकोणस्य गुणः)

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 3$ (उभयस्मिन् पक्षे $\angle 3$ इति योजनेन)

किन्तु $\angle 4$ एवञ्च $\angle 3$ इति रैखिकयुग्मं निर्मातः। अतः एतयोः योगः 180° इति अस्ति।

अर्थात् $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ इति।



आकृतिः 6.18

आयान्तु सम्प्रति पश्यामः यत् त्रिभुजस्य एतं कोणगुणं विभिन्न-प्रकारेषु वयं कथं प्रयोक्तुं शक्नुमःइति

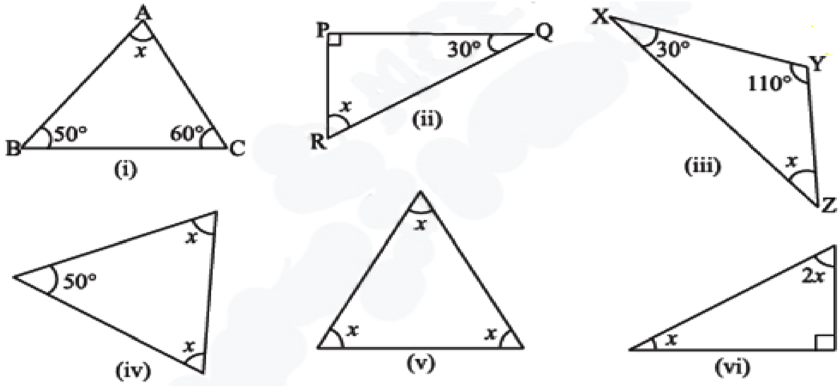
उदाहरणम् 2 6.18 इति प्रदत्ताकृत्याम् m $\angle P$ इत्यस्य मापः ज्ञायताम्।

समाधानम् त्रिभुजस्य कोणानां योगगुणेन m $\angle P + 47° + 52° = 180°$

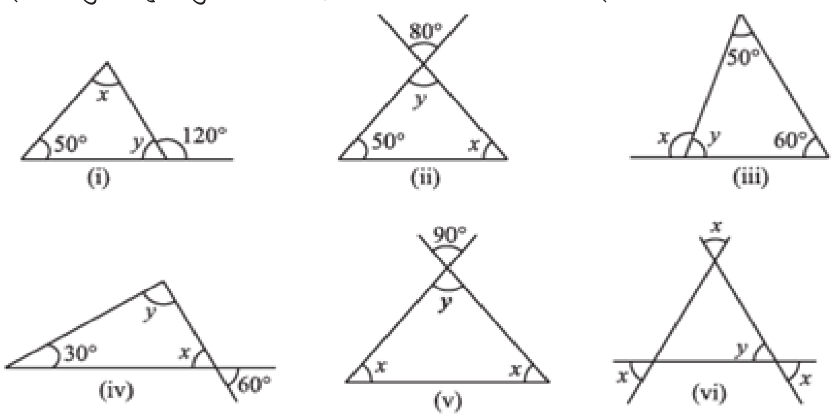
अतः m $\angle P = 180° - 47° - 52° = 180° - 99° = 81°$

प्रश्नावली 6.3

1. निम्नाङ्कितासु आकृतिषु x इत्यस्य मानः ज्ञायताम्।



2. निम्नाङ्कितासु आकृतिषु x तथा च y इत्यनयोः मानः ज्ञायताम्।



प्रयासं कुर्वन्तु

1. एकस्य त्रिभुजस्य द्वौ कोणौ 30° एवञ्च 80° इति स्तः। त्रिभुजस्य तृतीयकोणं जानन्तु।
2. कस्यचित् त्रिभुजस्य एकः कोणः 80° इति अस्ति तथा च शेषकोणौ समानौ स्तः। समानकोणयोः प्रत्येकं कोणस्य मापं जानन्तु।
3. कस्यचित् त्रिभुजस्य त्रिषु कोणेषु अनुपातः 1:2:1 एवम् अस्ति। त्रिभुजस्य त्रयः कोणाः ज्ञातव्याः। त्रिभुजस्य द्विधा वर्गीकरणम् अपि कुर्वन्तु।

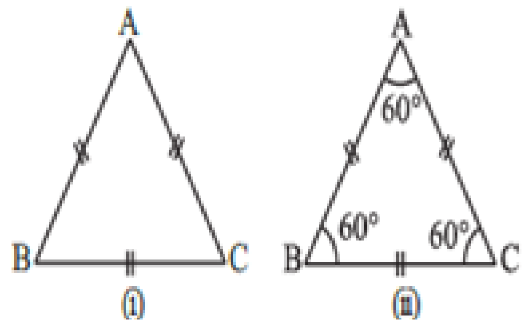
विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. किम् अपि एतादृशं त्रिभुजं सम्भवम् अस्ति यस्य द्वौ कोणौ समकोणौ भवताम् ?
2. किम् अपि एतादृशं त्रिभुजं सम्भवम् अस्ति यस्मिन् द्वौ कोणौ अधिककोणौ भवताम् ?
3. किम् अपि एतादृशं त्रिभुजं सम्भवम् अस्ति यस्मिन् द्वौ कोणौ न्यूनकोणौ भवताम् ?
4. किम् अपि एतादृशं त्रिभुजं सम्भवम् अस्ति यस्मिन् त्रयः कोणाः 60° इत्यस्माद् अधिकाः भवन्तु ?
5. किम् अपि एतादृशं त्रिभुजं सम्भवम् अस्ति यस्मिन् त्रयः कोणाः 60° इति भवन्ति।
6. किम् अपि एतादृशं त्रिभुजं सम्भवम् अस्ति यस्मिन् त्रयः कोणाः 60° इत्यस्य इत्यस्मात् न्यूनाः भवन्तु ?

6.6 द्वे विशेषत्रिभुजे - समबाहुः समद्विबाहुः च

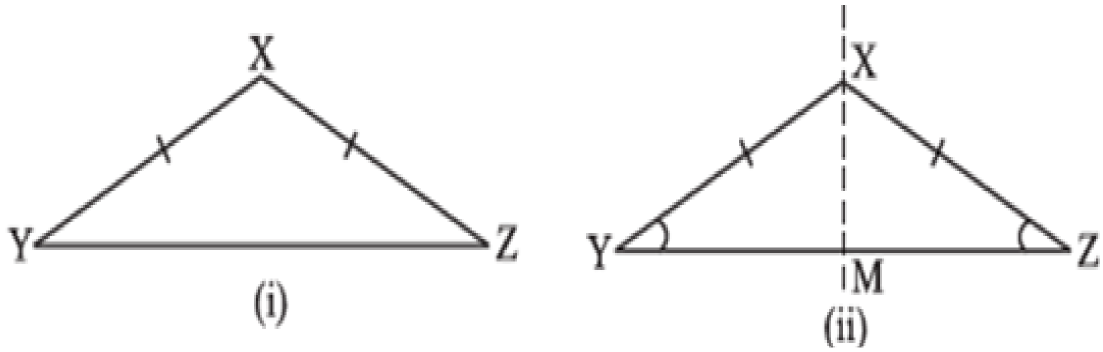
एकं त्रिभुजं यस्य तिसृणां भुजानां मापः समानः स्यात् समबाहु-त्रिभुजम् इति उच्यते।

एकम् ABC इति समबाहुत्रिभुजम् (आकृतिः 6.19) रचयन्तु। अस्य प्रतिरूपम् अर्थात् अस्यैव मापस्य एकम् अन्यं समबाहुत्रिभुजं कागदात् छिन्दन्तु। प्रथमं त्रिभुजं स्थिरीकुर्वन् अस्य उपरि द्वितीयत्रिभुजम् एतत् प्रथम- त्रिभुजम् आवृणन् स्थापयन्तु। द्वितीयत्रिभुजं प्रथमत्रिभुजं पूर्णतया आवृणोति। द्वितीयत्रिभुजं प्रथमत्रिभुजे केनापि प्रकारेण परिभ्राम्य स्थापयन्तु, ते त्रिभुजे पुनः अपि मिथः आवृणीतः। किं भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् यदि त्रिभुजस्य तिस्रः भुजाः समानाः स्युः तदा त्रयः कोणाः अपि समानमापाः एव भवन्ति। वयं निष्कर्षं निस्कासयामः यत् समबाहुत्रिभुजे (i) तिस्रः भुजाः समानमापाः भवन्ति। (ii) प्रत्येकं कोणस्य मापः 60° इति भवति।



आकृतिः 6.19

एकं त्रिभुजं यस्य द्वयोः भुजयोः मापः समानः स्यात् समद्विबाहु-त्रिभुजम् इति उच्यते।



आकृतिः 6.20

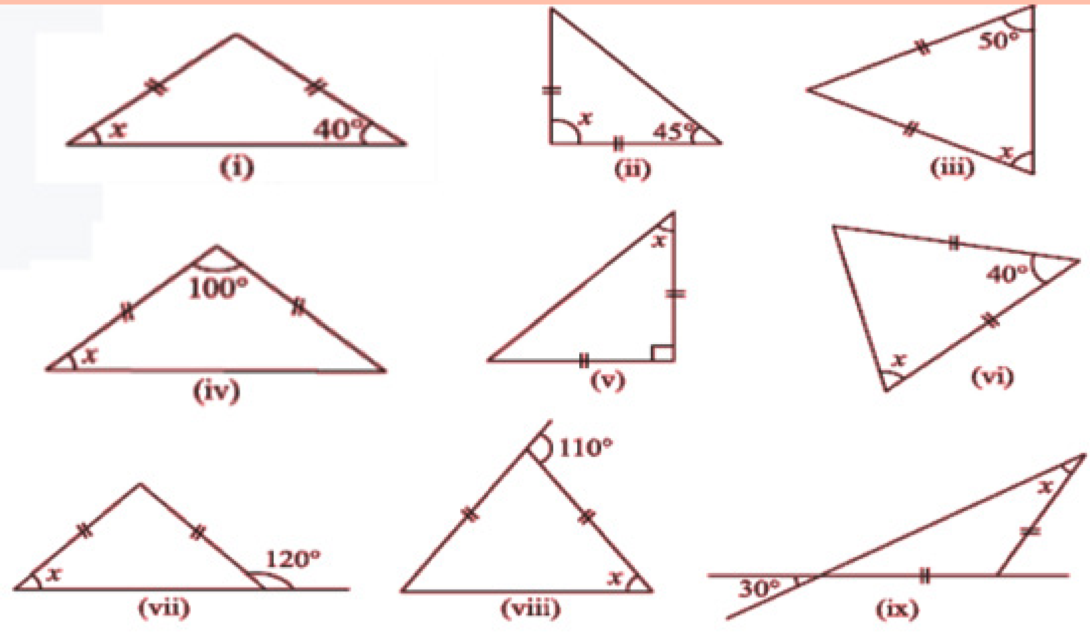
कागद-खण्डेन एकम् XYZ इति समद्विबाहुत्रिभुजं छिन्दन्तु यस्मिन् भुजा XY= भुजा XZ स्यात् (आकृतिः 6.20)। एतत् तथा वक्रीकुर्वन्तु येन Z इति शीर्षं Y इति शीर्षे आच्छादितं भवेत्। अधुना X इति शीर्षाद् गम्यमाना XM इति रेखा अस्य त्रिभुजस्य सममिताक्षः अस्ति (यस्य विषये भवन्तः चतुर्दशेऽध्याये पठिष्यन्ति)। भवन्तः पश्यन्ति यत् $\angle Y$ तथा च $\angle Z$ इति इतरेतरं पूर्णतया आवृणीतः। XY एवञ्च XZ इति त्रिभुजस्य समभुजे इति कथ्येते। YZ आधारः इति कथ्यते, $\angle Y$ एवञ्च $\angle Z$ इति आधारकोणौ स्तः यौ परस्परं समानौ भवतः।

अनेन प्रकारेण वयं निष्कर्षं निस्कासयामः यत् समबाहुत्रिभुजे (i) द्वे भुजे समदीर्घते युते भवतः।

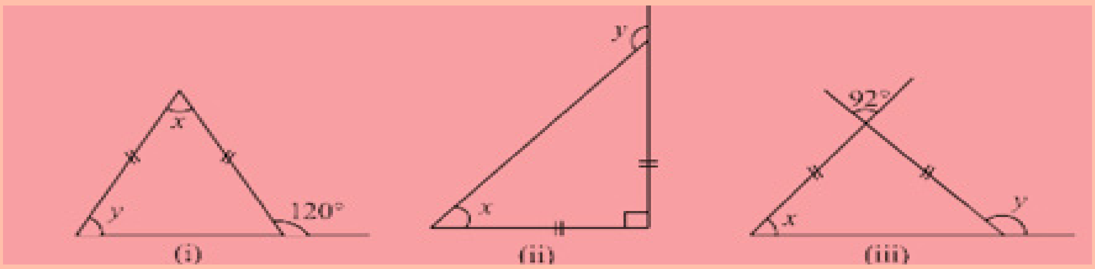
(ii) समान-भुजाभिमुखं कोणः समानः भवति।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. प्रत्येकम् आकृत्याम् x इत्यस्य मानः ज्ञायताम्

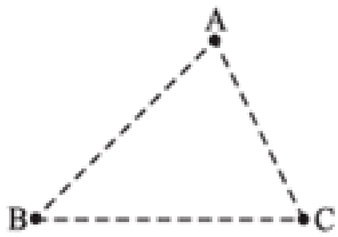


2. प्रत्येकम् आकृत्याम् x एवञ्च y इत्यनयोः मानः ज्ञायताम्



6.7 एकस्य त्रिभुजस्य द्वयोः भुजयोः मापयोः योगः

1. स्वीये क्रीडाक्षेत्रे A, B तथा च C इति त्रीन् बिन्दून् अङ्कयन्तु ये एकस्यामेव रेखायां न भवेयुः। चूर्णकम् (चूना) आदाय AB, BC तथा च AC इति पथः निर्धारयन्तु।
स्वां काञ्चन मित्रं वदन्तु यत् सा निर्धारितपथां प्रयुज्य केनचित् प्रकारेण A तः आरभ्य C इति पर्यन्तम् आगच्छेत्। उदाहरणार्थं सा सर्वप्रथमम् $\overline{AB}$ इत्यस्मिन् पथि तत्पश्चात् $\overline{BC}$ इत्यस्मिन् पथि चलित्वा अथवा C इत्यत्र आगच्छेत् अथवा $\overline{AC}$ इत्यस्मिन् पथि चलित्वा



आकृतिः 6.21

साक्षात् C इत्यत्र आगच्छेत्। यदि सा कञ्चन अन्यपन्थानम् ($\overline{AB}$ तथा च $\overline{BC}$) स्वीकरिष्यति तदा तया अधिकं चलितव्यं भविष्यति।

अपरशब्दैः $AB + BC > AC$ (i)

अनेन प्रकारेण यदि सा B इत्यस्माद् आरभ्य A इत्यत्र प्राप्तुकामा अस्ति तदा सर्वप्रथमम् $\overline{BC}$ इति पन्थानं तत्पश्चात् $\overline{CA}$ इति पन्थानं नैव स्वीकरिष्यति प्रत्युत सा $\overline{BA}$ इति पन्थानं स्वीकृत्य साक्षात् B इत्यस्माद् A इत्यत्र आगमिष्यति।

एतत् एतदर्थम् यत् $BC + CA > AB$ (ii)

अनेन तर्केण वयं पश्यामः यत्

$CA + AB > BC$ (iii)

अनेन ज्ञायते यत् कस्यचित् त्रिभुजस्य द्वयोः भुजयोः मापयोः योगः तृतीय-भुजस्य मापाद् अधिकः भवति।

2. भिन्नं भिन्नं मापयुताः पञ्चदश लघु-श्लाकाः (अथवा पट्टिकाः) स्वीकुर्वन्तु। तासां परिमापाः मन्यन्ताम् 6 सेण्टीमीटर, 7 सेण्टीमीटर, 8 सेण्टीमीटर, 9 सेण्टीमीटर, ..., 20 सेण्टीमीटरपरिमिताः सन्ति।

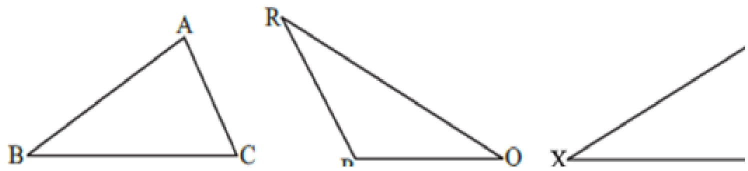
   एतासु तिस्रः शलाकाः आदाय त्रिभुजं निर्मातुं प्रयतन्ताम्। तिस्रः तिस्रः श्लाकानां विभिन्नसमूहान् स्वीकृत्य एतां प्रक्रियां व्याहरन्तु।

   मन्यन्तां सर्वप्रथमं भवन्तः 6 सेण्टीमीटरपरिमिताम् अथ च 12 सेण्टीमीटरपरिमितां दीर्घशलाकाद्वयं स्वीकुर्वन्ति। तृतीयशलाका $12 - 6 = 6$ सेण्टीमीटरपरिमिताद् अधिका दीर्घा किन्तु $12 + 6 = 18$ सेण्टीमीटरपरिमिताद् लघु स्वीकरणीया भविष्यति। एतत् सर्वं कृत्वा पश्यन्तु ज्ञानं च कुर्वन्तु एतत् किमर्थम् अस्ति।

   एकं त्रिभुजं निर्मातुं भवन्तः तिस्रः शलाकाः अनेन प्रकारेण तथा चेष्यन्ति येन तासु कयोश्चिद् द्वयोः शलाकयोः दीर्घतयोः योगः तृतीयशलाकायाः दैर्घ्याद् अधिकं स्यात्।

   अनया प्रक्रियया एतत् ज्ञायते यत् एकस्य त्रिभुजस्य द्वयोः भुजयोः मापयोः योगः तृतीयभुजायाः मापाद् अधिकं भवति।

3. निज-अभ्यास-पुस्तिकायां कानिचित् त्रीणि त्रिभुजानि यथा $\triangle ABC$, $\triangle PQR$ एवञ्च $\triangle XYZ$ इति निर्मान्तु (आकृतिः 6.22)।



(i) (ii) (iii)

आकृतिः 6.22

स्वकीयायाः मापिकायाः सहाय्येन एतेषां त्रिभुजानां भुजाः मित्वा एकेन तालिकारूपेण निम्नप्रकारेण लिखन्तु :

$\triangle$त्रिभुजस्य नाम	भुजानां मापः	किम् एतत् सत्यम् अस्ति ?	
$\triangle$ ABC	AB ___	AB – BC < CA ___ + ___ > ___	(आम् / न)
	BC ___	BC – CA < AB ___ + ___ > ___	(आम् / न)
	CA ___	CA – AB < BC ___ + ___ > ___	(आम् / न)

△ PQR	PQ___	$PQ - QR < RP$ $\_\_\_ + \_\_\_ > \_\_\_$	(आम् / न)
	QR ___	$QR - RP < PQ$ $\_\_\_ + \_\_\_ > \_\_\_$	(आम् / न)
	RP ___	$RP - PQ < QR$ $\_\_\_ + \_\_\_ > \_\_\_$	(आम् / न)
△ XYZ	XY ___	$XY - YZ < ZX$ $\_\_\_ + \_\_\_ > \_\_\_$	(आम् / न)
	YZ___	$YZ - ZX < XY$ $\_\_\_ + \_\_\_ > \_\_\_$	(आम् / न)
	ZX ___	$ZX - XY < YZ$ $\_\_\_ + \_\_\_ > \_\_\_$	(आम् / न)

अनया प्रक्रियया अस्माकं गतानुमानस्य पुष्टिः अपि भवति। अतः वयं निष्कर्षं निष्कास्यामः यद् एकस्य त्रिभुजस्य द्वयोः भुजयोः मापयोः योगः तृतीय-भुजस्य मापाद् अधिकः भवति।

युगपद् एतद् अपि ज्ञायते यत् एकस्य त्रिभुजस्य कयोश्चिद् द्वयोः भुजयोः मापयोः अन्तरं तृतीयभुजायाः मापात् न्यूनं भवति।

उदाहरणम् 3 किम् एतादृशं त्रिभुजं सम्भवम् अस्ति यस्य भुजानां परिमापाः 10.2 सेण्टीमीटर्, 5.8 सेण्टीमीटर् तथा च 4.5 सेण्टीमीटरपरिमिताः भवेयुः?

समाधानम् मन्यन्तां यत् एतादृशं त्रिभुजं सम्भवम् अस्ति। तदानीम् अस्य त्रिभुजस्य कयोश्चिद् द्वयोः भुजयोः मापयोः योगः तृतीय-भुजस्य मापाद् अधिकः भविष्यति। आयान्तु अवेक्षणं कृत्वा पश्याम -

किम् $4.5 + 5.8 > 10.2$? सत्यम् अस्ति।

किम् $5.8 + 10.2 > 4.5$? सत्यम् अस्ति।

किम् $10.2 + 4.5 > 5.8$? सत्यम् अस्ति।

अतः एतादृशं भुजमत् त्रिभुजं सम्भवम् अस्ति।

उदाहरणम् 4 एकस्य त्रिभुजस्य कयोश्चिद् द्वयोः भुजयोः मापः 6 सेण्टीमीटर् एवञ्च 8 सेण्टीमीटर् इति अस्ति। अस्य तृतीयभुजायाः मापः कयोश्चिद् द्वयोः सङ्ख्ययोः मध्ये भविष्यति ?

समाधानम् वयं जानीमः यत् त्रिभुजस्य कयोश्चिद् द्वयोः भुजयोः योगः तृतीय-भुजतः अधिकः भवति। अतः तृतीय-भुजः प्रदत्तयोः द्वयोः भुजयोः योगात् न्यूना स्यात्। अर्थात् तृतीयभुजा $8 + 6 = 14$ सेण्टीमीटरपरिमितात् न्यूना भविष्यति।

एषा तृतीय-भुजः प्रदत्तयोः द्वयोः भुजयोः अन्तराद् अधिका स्यात्। अर्थात् तृतीय-भुजः $8 - 6 = 2$ सेण्टीमीटरपरिमिताद् अधिकः भविष्यति।

तृतीयभुजायाः मापः 2 सेण्टीमीटरपरिमिताद् अधिकः अथ च 14 सेण्टीमीटरपरिमितात् न्यूनः स्यात्।

प्रश्नावली 6.4

1. किं निम्न-प्रदत्तैः भुजमापैः किमपि त्रिभुजं सम्भवम् अस्ति ?
   (i) 2 सेण्टीमीटर् , 3 सेण्टीमीटर्, 5 सेण्टीमीटर्

(ii) 3 सेण्टीमीटर्, 6 सेण्टीमीटर्, 7 सेण्टीमीटर्

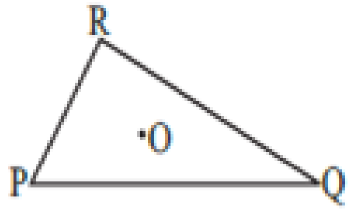
(iii) 6 सेण्टीमीटर्, 3 सेण्टीमीटर्, 2 सेण्टीमीटर्

2. PQR इति त्रिभुजस्य अभ्यन्तरम् O इति कञ्चन बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु। किम् एतद् उचितम् अस्ति यत्

(i) OP + OQ > PQ?

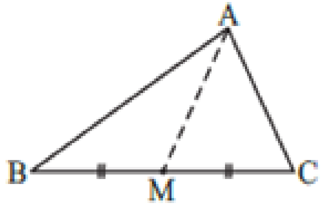
(ii) OQ + OR > QR?

(iii) OR + OP > RP?



3. ABC इति त्रिभुजस्य एका माध्यमिका AM इति अस्ति। निर्दिशन्तु यत् किम् AB + BC + CA > 2 AM?

(सङ्केतः $\triangle$ABM तथा च $\triangle$AMC इत्यनयोः भुजासु विचारं कुर्वन्तु)

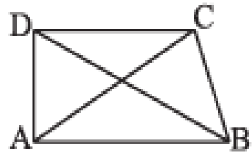


4. ABCD इति एकं चतुर्भुजम् अस्ति।

किम् AB + BC + CD + DA > AC + BD?

5. ABCD इति एकं चतुर्भुजम् अस्ति ।

किम् AB + BC + CD + DA < 2 (AC + BD)?



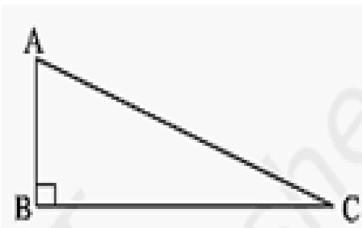
6. एकस्य त्रिभुजस्य द्वयोः भुजयोः मापः 12 सेण्टीमीटर् तथा च 15 सेण्टीमीटरपरिमितः अस्ति । अस्य तृतीयभुजायाः मापः कयोश्चित् द्वयोः मापयोः मध्ये स्यात् ?

विचारयन्तु चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. कस्मिंश्चित् त्रिभुजे किं तस्य द्वयोः कोणयोः योगः तृतीयात् कोणात् सदैव अधिकः भवति ?

6.8 समकोणत्रिभुजं तथा च पायथागोरसगुणः

ईसापूर्वं षष्ठे शतके एकः यूनानी दार्शनिकः पायथागोरसः समकोणत्रिभुजेन सम्बन्धितम् एकं महत्त्वपूर्णगुणम् अजानात्, यं वयम् अस्मिन् अनुभागे बोधयन्तः स्मः। अतः अयं गुणः तस्यैव नाम्ना प्रथितः। वस्तुतः अस्य गुणस्य ज्ञानं केषाञ्चित् अन्यदेशानां जनानाम् अपि आसीत् । भारतीयः गणितज्ञः बौधायनः अपि अस्य गुण-समकक्षस्य एकस्य गुणस्य परिचयम् अददात् ।

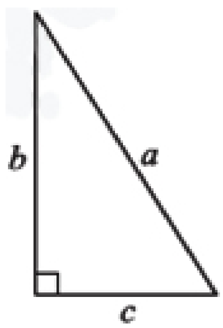


आकृतिः 6.23

अधुना वयं पायथागोरसगुणस्य विस्तरेण अध्ययनं कुर्मः।

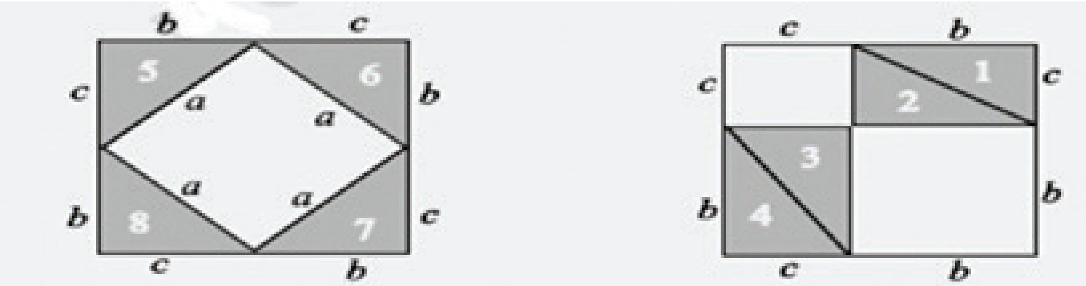
समकोणत्रिभुजे तस्य भुजानां कृते विशिष्टानि नामानि दीयन्ते । समकोणस्य अभिमुखं भुजं कर्णः इति कथ्यते । अन्ये दौ भुजौ समकोणत्रिभुजस्य पार्श्वः इति कथ्यते ।

$\triangle$ABC इति त्रिभुजे (आकृतिः 6.23) B इति शीर्षे समकोणः निर्मितः अस्ति। अतः AC अस्य कर्णः अस्ति। $\overline{AB}$ तथा च $\overline{BC}$ इति $\triangle$ABC समकोणत्रिभुजस्य द्वौ पार्श्वौ स्तः। कस्यचिद् अपि परिमापस्य एकं समकोणत्रिभुजं स्वीकृत्य तस्य अष्टौ प्रतिरूपाणि निर्मान्तु । उदाहरणार्थम् एकं समकोणत्रिभुजं स्वीकुर्मः यस्य कर्णस्य मापः a इति मात्रकम् तथा च तस्य द्वयोः पार्श्वयोः मापः b इति मात्रकम् अथ च c इति



आकृतिः 6.24

मात्रकम् अस्ति । (आकृतिः 6.24) । एकस्मिन् कागदे एकसमानौ परिमापवन्तौ वर्गौ निर्मान्तु यस्य भुजानां मापः b + c इत्यस्य तुल्यः भवेत् । इदानीं स्वस्य अष्टसु त्रिभुजेषु चत्वारि त्रिभुजानि A इत्यस्मिन् वर्गे अथ च चत्वारि त्रिभुजानि B इत्यस्मिन् वर्गे स्थापयन्तु यथा निम्नाकृत्यां दर्शितं वर्तते (आकृतिः 6.25)।



A वर्गः **आकृतिः 6.25** B वर्गः

भवन्तः जानन्ति यत् द्वौ वर्गौ एकरूपौ अर्थात् तुल्यौ स्तः तथा च न्यस्तानि अष्टौ त्रिभुजानि अपि तुल्यानि सन्ति।

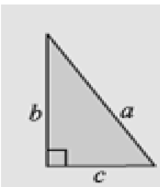
अतः A इत्यस्य अनाच्छादितं क्षेत्रफलम् = B इत्यस्य अनाच्छादितं क्षेत्रफलम्

अथवा A इति वर्गस्य अन्तस्थवर्गस्य क्षेत्रफलम् = B इति वर्गस्य अन्ते द्वयोः अनाच्छादितयोः वर्गयोः क्षेत्रफलस्य योगः अर्थात्

$$a^2 = b^2 + c^2$$

एषः पायथागोरसगुणः अस्ति । एतद् अनेन प्रकारेण अपि वक्तुं शक्यते –

> एकस्मिन् समकोणत्रिभुजे
> कर्णे निर्मितवर्गः = पार्श्वयोः निर्मितयोः द्वयोः वर्गयोः योगः

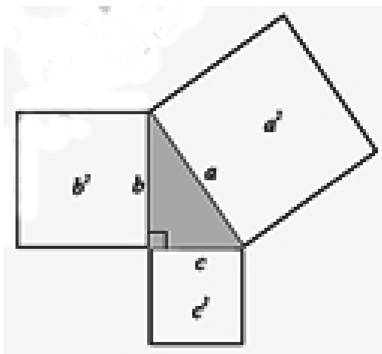


पायथागोरसगुणः गणिते एकः अतीव महत्त्वपूर्णगुणः अस्ति । अग्रिमासु कक्षासु एतद् एकेन साध्यरूपेण विधिपूर्वकम् अपि साधयिष्यामः । अधुना अस्य तात्पर्यं सम्यक्तया अधिगच्छामः।

एतदनुसारेण कस्मिंश्चित् समकोणत्रिभुजे कर्ण-निर्मितवर्गस्य क्षेत्रफलं पाद-निर्मितवर्गयोः क्षेत्रफलस्य योगस्य तुल्यं भवति ।

एकं वर्गाकारं कागदं स्वीकृत्य तस्य उपरि एकं समकोणत्रिभुजं निर्मान्तु । अस्य भुजासु वर्गाणां क्षेत्रफलं ज्ञायताम् अस्य च साध्यस्य व्यवहारिकरूपेण अवेक्षणं क्रियताम् (आकृतिः 6.26) । यदि किमपि त्रिभुजं समकोणत्रिभुजम् अस्ति तर्हि तस्मिन् पायथागोरसगुणः प्रयुक्तः भवति । अधुना यदि कस्मिंश्चित् समकोणत्रिभुजे पायथागोरसगुणः सत्यम् अस्ति तदा किम् एतद् एकं समकोणत्रिभुजं भविष्यति ?

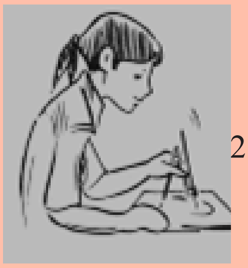
(वयम् एतादृशीः समस्याः विलोमी-समस्याः इति कथयामः) वयम् अस्य प्रश्नस्य उत्तरं दातुं प्रयतिष्यामहे । सम्प्रति वयं दर्शयिष्यामः यत् यदि कस्मिंश्चित् त्रिभुजे कयोश्चित् द्वयोः भुजयोः वर्गयोगः तृतीयायाः भुजायाः वर्गस्य तुल्यः अस्ति तदा तत् त्रिभुजं समकोणत्रिभुजं भवेत् ।



आकृतिः 6.26

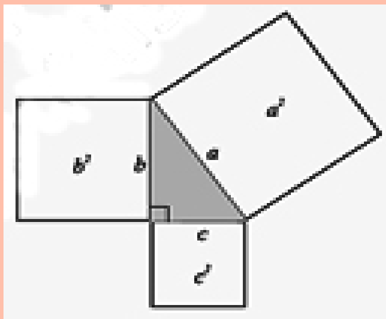
एतान् कुर्वन्तु

1. 4 सेण्टीमीटर्, 5 सेण्टीमीटर् तथा च 6 सेण्टीमीटरपरिमितान् भुजमतः त्रीन् वर्गान् कागदात् छिन्दन्तु । एतेषां त्रयाणां वर्गाणां त्रीणि शीर्षाणि मेलयन्तः तथा व्यवस्थीकृत्य निदधन्तु येन तेषां भुजाभिः एकं त्रिभुजं प्राप्तं भवेत् (आकृतिः 6.27)। अनेन प्रकारेण प्राप्त-त्रिभुजं कागदे अङ्कीकुर्वन्तु ।



अस्य त्रिभुजस्य त्रीन् कोणान् मान्तु । भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् एतेषु कश्चन अपि समकोणः नास्ति । ध्यानं यच्छन्तु यत् $4^2 + 5^2 \neq 6^2$, $5^2 + 6^2 \neq 4^2$ तथा च $6^2 + 4^2 \neq 5^2$

2. उपयुक्तां प्रक्रियाम् 4 सेण्टीमीटर्, 5 सेण्टीमीटर् तथा च 7 सेण्टीमीटरपरिमितान् भुजमतः त्रीन् वर्गान् आदाय पुनः आचरन्तु । अस्मिन् पर्याये भवन्तः एकम् अधिककोणत्रिभुजम प्राप्स्यन्ति । अत्र ध्यानं यच्छन्तु यत् $4^2 + 5^2 \neq 7^2$ इत्यादिः।



आकृतिः 6.27

अनया प्रक्रियया ज्ञायते यत् पायथागोरसगुणः केवलं तदैव प्रयुज्यते यदा त्रिभुजम् एकं समकोणत्रिभुजं भविष्यति ।

अतः अस्माभिः एतत् तथ्यं प्राप्यते ।

यदि कस्मिंश्चित् त्रिभुजे पायथागोरसगुणं तदा एव प्रयोक्तुं शक्नुमः यदा तत् समकोणत्रिभुजं भविष्यति ।

उदाहरणम् 5 एकस्य त्रिभुजस्य भुजाः 3 सेण्टीमीटर्, 4 सेण्टीमीटर् तथा च 5 सेण्टीमीटरपरिमिताः दीर्घाः सन्ति । किं तत् एकं समकोणत्रिभुजम् अस्ति इति निर्धारितं कुर्वन्तु ?

समाधानम् $3^2 = 3 \times 3 = 9$, $4^2 = 4 \times 4 = 16$, $5^2 = 5 \times 5 = 25$

वयं पश्यामः यत् $3^2 + 4^2 = 5^2$

अतः एतत् त्रिभुजम् एकं समकोणत्रिभुजम् अस्ति ।

ध्यानं यच्छन्तु - कस्मिंश्चित् समकोणत्रिभुजे कर्णः दीर्घतमः भुजः भवति । अस्मिन् उदाहरणे 5 सेण्टीमीटरपरिमिता दीर्घः भुजः एव कर्णः अस्ति ।

उदाहरणम् 6 $\triangle$ ABC इति त्रिभुजस्य C इति समकोणः अस्ति । यदि AC = 5 सेण्टीमीटरपरिमिता तथा च BC = 12 सेण्टीमीटरपरिमिता अस्ति तदा AB इति भुजस्य दैर्घ्यं ज्ञातं जानन्तु ।।

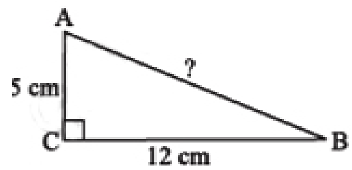
समाधानम् सहायातार्थम् अनुमानेन एकाम् उपयुक्ताम् आकृतिं रचयामः । (आकृतिः 6.28)

पायथागोरसगुणेन

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$= 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

$AB^2 = 13^2$ अतः AB = 13 इति अस्ति ।

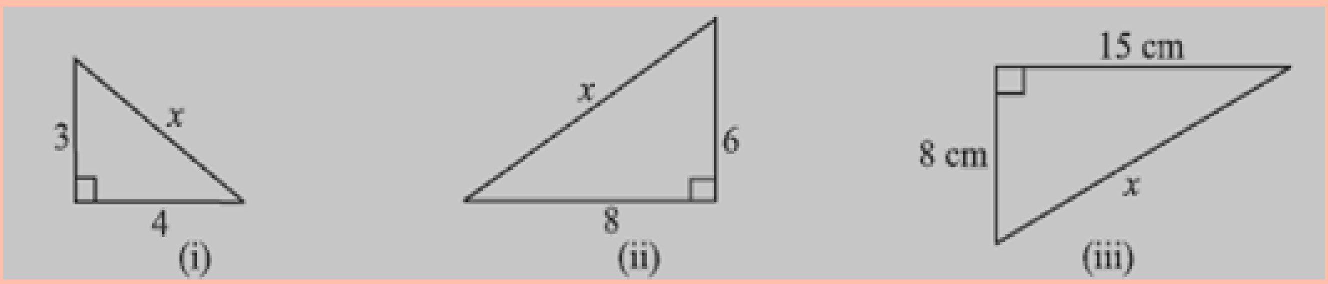


अर्थात् AB इत्यस्याः भुजस्य दैर्घ्यं 13 सेण्टीमीटरपरिमितम् अस्ति ।

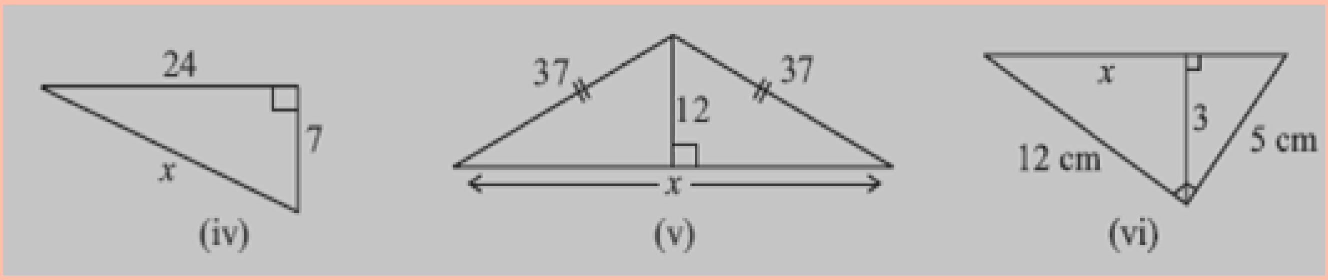
आकृतिः 6.28

ध्यानं यच्छन्तु - भवन्तः पूर्णवर्ग-सङ्ख्याः अभिज्ञातुम् अभाज्य-गुणनखण्ड-विधिं प्रयोक्तुं शक्नुवन्ति।

एतान् कुर्वन्तु



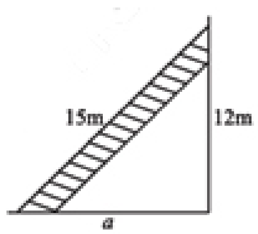
एतान् कुर्वन्तु



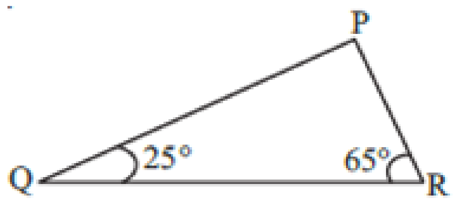
आकृतिः 6.29

प्रश्नावली 6.5

1. PQR इति एकं त्रिभुजम् अस्ति यस्य P इति समकोणः अस्ति। यदि PQ = 10 सेण्टीमीटरपरिमितं तथा च PR = 24 इति सेण्टीमीटरपरिमितं भवेत् तदानीं QR इति ज्ञायताम् ।
2. ABC इति एकं त्रिभुजम् अस्ति यस्य C इति समकोणः अस्ति । यदि AB = पञ्चविंशतिः (25) सेण्टीमीटरपरिमितं तथा च AC = 7 इति सेण्टीमीटरपरिमितं भवेत् तदा BC इति ज्ञायताम् ।
3. भित्तिम् अवलम्ब्य पञ्चदशमीटरपरिमितम् (15) दीर्घस्य एकस्य निःश्रेण्याः पादौ किञ्चिद् दूरे संस्थाप्य भूमितः द्वादशमीटरपरिमितं (12) उच्चैः स्थितं वातायनपर्यन्तं प्राप्नोति । भित्तितः निःक्षेण्याः-पादयोः दैर्घ्यं ज्ञायताम् ।
4. निम्नलिखितेषु भुजानां कतमाः समूहाः एकं त्रिभुजं निर्मान्तुं शक्नुवन्ति ?
   (i) 2.5 सेण्टीमीटर्, 6.5 सेण्टीमीटर्, 6 सेण्टीमीटर्
   (ii) 2 सेण्टीमीटर्, 2 सेण्टीमीटर्, 5 सेण्टीमीटर्
   (iii) 1.5 सेण्टीमीटर्, 2सेण्टीमीटर्, 2.5 सेण्टीमीटर्
   समकोणत्रिभुजे सति तस्य समकोणम् अपि परिचिन्वन्तु ।



5. एकः वृक्षः भूमितः पञ्चमीटरपरिमितात् (5) उपरिष्टात् त्रूटति वृक्षस्य च शिरस्भागः भूमिं तस्य आधाराद् द्वादशमीटरपरिमितं (12) दूरं स्पृशति । वृक्षस्य औन्नत्यं ज्ञायताम्।
6. $\triangle$PQR इत्यस्मिन् त्रिभुजे Q इति कोणः 25° तथा च R इति कोणः 65° स्तः
   निम्नलिखितेषु कतमत् कथनं सत्यम् अस्ति ?
   (i) $PQ^2 + QR^2 = RP^2$
   (ii) $PQ^2 + RP^2 = QR^2$
   (iii) $RP^2 + QR^2 = PQ^2$



7. एकस्य आयतस्य दीर्घता चत्वारिंशत्सेण्टीमीटरपरिमिता (40) वर्तते तस्य च विकर्णः एकचत्वारिंशत्सेण्टीमीटरपरिमितः (41) वर्तते । अस्य परिमापं जानीत ।
8. एकस्य समचतुर्भुजस्य विकर्णौ षोडशसेण्टीमीटरपरिमितः (16) तथा च त्रिंशत्सेण्टीमीटर्-परिमितः (30) स्तः । अस्य परिमापं ज्ञातं कुरूत ।

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. PQR इति त्रिभुजे P इति एकः समकोणः अस्ति। अस्य दीर्घतमा भुजा कतमा अस्ति ?
2. ABC इति त्रिभुजस्य B इति एकः समकोणः अस्ति। अस्य दीर्घतमा भुजा कतमा अस्ति ?
3. कस्यचित् समकोणत्रिभुजस्य दीर्घतमा भुजा कतमा भवति ?
4. कस्मिंश्चिद् आयते विकर्णे निर्मित-वर्गस्य क्षेत्रफलं तस्य दैर्घ्ये विस्तृत्यां च निर्मित-वर्गाणां क्षेत्रफलस्य योगस्य समानं भवति। एतद् बौधायनप्रमेयम् अस्ति। अस्य पायथागोरसगुणेन तुलनां कुर्वन्तु।

एतान् कुर्वन्तु

ज्ञानवर्धकः क्रियाकलापः

आकृतीः संयोज्य अथवा त्रोटयित्वा पायथागोरससाध्यं अनेकविधिभिः साधितम्। एषु विधिषु कतिचन एकत्रीकृत्य ताः एकं कोष्ठकं कृत्वा प्रस्तुवन्तु।

अस्माभिः का चर्चा कृता ?

1. एकस्य त्रिभुजस्य **तिस्रः भुजाः** त्रयः च **कोणाः** अस्य **षड् अवयवयाः** इति कथ्यन्ते।
2. कस्यचित् त्रिभुजस्य एकं शीर्षं तस्य च अभिमुखं भुजायाः मध्यबिन्दुना मेल्यमानं रेखाखण्डं तस्य एका **माध्यिका** इति भवति। एकस्मिन् त्रिभुजे तिस्रः माध्यमिकाः भवन्ति।
3. कस्यचित् त्रिभुजस्य एकस्मात् शीर्षात् तस्य सम्मुख-भुजायाम् आलिखितं लम्बं त्रिभुजस्य एकः शीर्षलम्बः इति कथ्यते। एकस्मिन् त्रिभुजे त्रयः शीर्षलम्बाः भवन्ति।
4. कस्यचित् त्रिभुजस्य **बाह्यकोणः** काञ्चिद् एकां भुजम् एकामेव दिशम् प्रति वर्धनेन निर्मितं भवति।
5. बाह्यकोणस्य एकः गुणः त्रिभुजस्य बाह्यकोणस्य परिमापः,तस्य द्वयोः सम्मुखान्तःकोणयोः योगस्य समानः भवति।
6. त्रिभुजस्य कोणानां योग-गुणः एकस्य त्रिभुजस्य त्रयाणां कोणानां योगः अशीत्युत्तरैकशतडिग्रीपरिमितः(180°) इति भवति।
7. एकं त्रिभुजं यस्य प्रत्येकं भुजस्य मापः समानः भवेत् **समबाहुत्रिभुजम्** इति कथ्यते। समबाहुत्रिभुजस्य प्रत्येकं कोणः षष्ठीडिग्रीपरिमितः (60°) भवति।
8. एकं त्रिभुजं यस्य केचित् द्वौ भुजौ परिमापे समाने भवेतां **समद्विबाहुत्रिभुजम्** इति कथ्यते। समद्विबाहुत्रिभुजस्य असमाना भुजा तस्य आधारः इति कथ्यते तथा च आधारे निर्मितौ कोणौ परस्परं समानौ भवतः।
9. त्रिभुजस्य भुजानां सम्बद्धगुणाः -
   त्रिभुजस्य कयोश्चित् द्वयोः भुजयोः मापयोः योगः तृतीय-भुजस्य मापनात् अधिकः भवति।
   त्रिभुजस्य कयोश्चित् द्वयोः भुजयोः मापयोः अन्तरं तृतीय-भुजस्य मापनात् न्यूनं भवति। एतौ गुणौ कस्यचित् त्रिभुजस्य रचनायाः सम्भावनाकथने उपयोगिनौ भवतः अपरन्तु तस्य त्रयाणांपरिमापाः दत्ताः स्युः।
10. समकोणत्रिभुजे समकोणाभिमुखं भुजः **कर्णः** तथा च अन्ये द्वे भुजे तस्य **पार्श्वौ** इति कथ्यते।

11. पायथागोरसगुणः

एकस्मिन् समकोणत्रिभुजे कर्णस्य वर्गः = तस्य द्वयोः पादयोः वर्गयोः योगः।

यदि एकं त्रिभुजं समकोणत्रिभुजं नास्ति तदा एषः पायथागोरसगुणः नैव प्रयुज्यते। एषः गुणः एतत् तथ्यं निर्धारीकर्तुम् उपयोगी भवति यत् किमपि प्रदत्तं त्रिभुजं समकोणत्रिभुजम् अस्ति अथवा नास्ति।